18/11/2020

Συνέχεια απόδειξης:

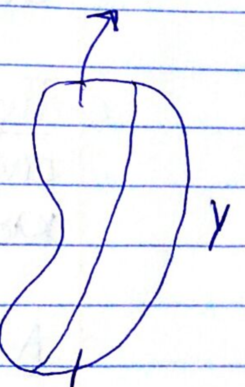
• Έστω ότι A κλειστό στον Y. Θέτουμε: B η κλειστότητα του A στον X $(B=\bar{A})$.
Θδο $A = B \cap Y$. Προφανώς, $A \subseteq B \cap Y$.
Αρκεί νδο $A \supseteq B \cap Y$.
Έστω $y \in B \cap Y$. Τότε, αφού $y \in B = \bar{A}$,
$\exists \{y_n\} \subseteq A$, τ.ω. $y_n \to y$.

Αλλά, A κλειστό στο $Y \implies$
$y \in A$, δηλαδή $A \supseteq B \cap Y \implies A = B \cap Y$.

• Έστω $A \subseteq Y$. A ανοικτό στον Y, αν-ν $Y \setminus A$ κλειστό στον Y.
$\overset{\text{Προηγούμενα}}{\iff}$ $\exists B$ κλειστό στον X, τ.ω. $\underset{Y \cap A^c}{\underset{\shortparallel}{Y \setminus A}} = B \cap Y$.

Άλλά, $Y=(Y\cap A)\cup(Y\cap A^c)$ ξένα

$Y=(Y\cap B)\cup(Y\cap B^c)$ ξένα



Όμως, $Y\cap A^c=Y\cap B$

Δηλαδή, $Y\cap A^c=Y\cap B$ αν-ν

$Y\cap A=Y\cap B^c$ ↳ ανοικτό

Άρα, A ανοικτό στον Y αν-ν $\exists\, B$ κλειστό στον X, τ.ω.

$A=Y\cap B^c$ → ανοικτό. ☒

Πόρισμα: Αν $A\subseteq Y$ → ανοικτό (αντ. κλειστό) στον Y, Y υπόχωρος του X και Y ανοικτό (αντ. κλειστό) στον X, τότε A ανοικτό (αντ. κλειστό) στον X.

Ακολουθίες Cauchy - Πληρότητα.

Ορισμός: Έστω $\{x_n\}\subseteq X$. Η $\{x_n\}$ λέγεται Cauchy, αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m,n\geq n_0$, να ισχύει

$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

Πρόταση: Αν $\{x_n\}$ συγκλίνει, τότε $\{x_n\}$ Cauchy.

Απόδειξη: Όμοια με την περίπτωση των πραγματικών ακολουθιών. ☒

Ορισμός: Ο μ.χ. (X,d) λέγεται πλήρης, αν κάθε ακολουθία Cauchy από τον X, συγκλίνει μέσα στον X.

Παράδειγμα: $(X,d) = ((0,1), |\cdot|)$

Αν $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, τότε $\frac{1}{n} \to 0$, άρα είναι Cauchy στον $(\mathbb{R}, |\cdot|) \Rightarrow \{x_n\}$ Cauchy στον (X,d), αλλά $x_n \to 0 \notin (0,1)$ ($\{x_n\}$ δεν συγκλίνει μέσα στον X) $\Rightarrow (X,d)$ δεν είναι πλήρης.

Θεώρημα: Έστω (X,d) πλήρης και $Y \subseteq X$. Τότε, ο (Y,d) είναι πλήρης αν-ν Y κλειστό στον X.

Απόδειξη: $(\Longrightarrow)$ (Y,d) πλήρης. Έστω

$\{y_n\} \subseteq Y$, τ.ω. $y_n \to y$, για κάποιο

$y \in X$. Αρκεί νδο $y \in Y$. Όμως, $\{y_n\}$ συγκλίνει $\Longrightarrow \{y_n\}$ Cauchy στον X

$\Rightarrow \{y_n\}$ Cauchy στον $Y \xRightarrow{Y \text{ πλήρης}}$

$\exists z \in Y$, τ.ω. $y_n \to z \xRightarrow[\text{ορίου}]{\text{μοναδ.}} z = y \Rightarrow y \in Y$.

$(\Longleftarrow)$ Y κλειστό στον X. Έστω $\{y_n\} \subseteq Y$ Cauchy στον $Y \Longrightarrow$

$\{y_n\}$ Cauchy στον $X \xRightarrow{X \text{ πλήρης}} \{y_n\}$ συγκλίνει

$\Longrightarrow \exists y \in X$, τ.ω. $y_n \to y$ $\underline{Y \text{ κλειστό}}$

$y \in Y \Rightarrow$ Η $\{y_n\}$ συγκλίνει μέσα στον Y. ◻

Συμπάγεια

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η $\{A_i\}_{i\in I}$ είναι κάλυψη του $A \subseteq X$, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

Λέμε ότι η $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι ανοιχτή κάλυψη, αν A_i ανοιχτό, $\forall i \in I$.

Έστω $\{B_j\}_{j\in J}$ μία κάλυψη του A.

Η $\{B_j\}_{j\in J}$ ονομάζεται υποκάλυψη της $\{A_i\}_{i\in I}$, αν $B_j \in \{A_i\}_{i\in I}$, $\forall j \in J$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $K \subseteq X$. Το K ονομάζεται συμπαγές αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη (ανάγεται σε πεπερασμένη).

<u>Πρόταση</u>: Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές. Επίσης, πεπερασμένη ένωση συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο.

<u>Απόδ.</u> Άμεσον από τον ορισμό της συμπάγειας.

<u>Θεώρημα 1</u>: K συμπαγές $\Rightarrow$ K φραγμένο

Απόδειξη: Έστω $r>0$. Τότε, η οικογένεια $\{B(x,r) : x\in K\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του K.

$\overset{\text{κουμπ.}}{\Longrightarrow} \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.

• $\forall x,y \in K$, $\exists i,j \in \{1,\ldots,n\}$, τ.ω. $x\in B(x_i,r)$, $y\in B(x_j,r)$.

Άρα, $d(x,y) \leq d(x,x_i)+d(x_i,y) \leq$

$d(x,x_i)+d(x_i,x_j)+d(x_j,y) \leq$
$2r+d(x_i,x_j) \leq 2r+\max_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} d(x_i,x_j)$

Άρα, K φραγμένο. ▨

Θεώρημα Lindeloff: Έστω (X,d) διαχωρίσιμος.

Τότε, κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει το πολύ αριθμήσιμη υποκάλυψη.

Απόδειξη: Έστω $\{d_n : n\in\mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Έστω $\mathcal{U}$ μια ανοικτή κάλυψη του X και $U_0\in\mathcal{U}$.

• Έστω $n\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Q}$. Αν $\exists U\in\mathcal{U}$, τ.ω. $U\supseteq B(d_n,q)$, θέτουμε $U(n,q)$ να είναι ένα τέτοιο U (στην τύχη). Αν $\nexists U\in\mathcal{U}$ τ.ω. $U\supseteq B(d_n,q)$, τότε θέτουμε $U(n,q):=U_0$.

• Η οικογένεια $\{U(n,q) : n\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{Q}\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X.

Αρκεί νδο ότι είναι κάλυψη του X, δηλ.

$X = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{Q}}} U(n,q)$.

- Έστω $x\in X$. Αρκεί νδο $\exists n,q$, τ.ω. $x\in U(n,q)$. $\exists U_x \in \mathcal{U}$, τ.ω. $x\in U_x$.

Όμως, U_x ανοικτό $\Longrightarrow \exists r>0$, τ.ω. $B(x,r)\subseteq U_x$.

- $\{d_n : n\in\mathbb{N}\}$ πυκνό στον X. $\Longrightarrow \exists n_x\in\mathbb{N}$, $q_x\in\mathbb{Q}$, τ.ω. $d_{n_x}\in B(x,\frac{r}{2})$ και

$\underbrace{d(x,d_{n_x}) < q_x}< \frac{r}{2}$.

$\Longrightarrow x\in B(d_{n_x},q_x)$

$\Longrightarrow \forall y\in B(d_{n_x},q_x)$, έχουμε:

$d(x,y)\le d(x,d_{n_x})+d(d_{n_x},y) < q_x+q_x =$

$2q_x < 2\frac{r}{2} = r$.

$\Longrightarrow y\in B(x,r)\subseteq U_x$

$\Longrightarrow B(d_{n_x},q_x)\subseteq U_x$.

Άρα, $\exists U\ (=U_x)$, τ.ω. $U\in\mathcal{U}$ και $U\supseteq B(d_{n_x},q_x)$.

$\Longrightarrow U(n_x,q_x)\supseteq B(d_{n_x},q_x)\ni x$

$\Longrightarrow x\in \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{Q}}} U(n,q) \Longrightarrow X\subseteq \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{Q}}} (n,q)$

$\Longrightarrow \{U(n,q) : (n,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Q}\}$ · κάλυψη του X. ☒

Π.χ. Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διαχωρίσιμος.

Θεώρημα 2: Έστω $K \subseteq X$. Το K είναι συμπαγές, αν-ν $\forall \{x_n\} \subseteq K$, $\exists$ υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ και $x \in K$, τ.ω. $x_{k_n} \to x$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $\{x_n\} \subseteq K$. Έστω ότι η $\{x_n\}$ δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία.

• $\forall x \in K$, $\exists \varepsilon_x > 0$, τ.ω. $x_n \notin B(x,\varepsilon_x)\setminus\{x\}$. για κανένα $n\in\mathbb{N}$.

Άλλιως, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $x_{k_1} \in B(x,1)\setminus\{x\}$.
$\exists k_2 > k_1$, τ.ω. $x_{k_2} \in B(x,1/2)\setminus\{x\}$.
(αν $\nexists$ τέτοιο k_2, τότε $\forall k > k_1$, $x_k \notin B(x,1/2)\setminus\{x\}$
άρα αν $r := \min(\{d(x,x_i) : i \in \{1,\dots,k\}, d(x,x_i)>0\}\cup\{\frac{1}{2}\})$
$\Longrightarrow r > 0$ και $x_n \notin B(x,r)\setminus\{x\}$, για κανένα $n \in \mathbb{N}$)

$\exists k_3 > k_2$, τ.ω. $x_{k_3} \in B(x,\frac{1}{3})\setminus\{x\}$
(ομοίως).
⋮

Άρα, $\exists \{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$, τ.ω. $x_{k_n} \to x$, άτοπο από την υπόθεση.

• Η οικογένεια $\{B(x,\varepsilon_x) : x \in K\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του K.

Κ συμπαγές $\exists\, y_1, y_2, \dots, y_\nu \in K$, τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\nu} B(y_i,\varepsilon_{y_i})$

Όμως, $\{x_n\} \subseteq K \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\nu} B(y_i,\varepsilon_{y_i})}_{\text{περιέχει το πολύ } \nu\text{-όρους της } \{x_n\}}$

$\Longrightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο.

Άρα, υπάρχουν άπειροι όροι της $\{x_n\}$ που ταυτίζονται μεταξύ τους. $\Longrightarrow$ Υπάρχει σταθερή (άρα συγκλίνουσα στο K) υπακολουθία της $\{x_n\}$, άτοπο.

$(\Longleftarrow)$ $\forall \{x_n\} \subseteq K$, $\exists \{x_{k_n}\}$ υπακ. της $\{x_n\}$ και $x \in K$, τ.ω. $x_{k_n} \to x$.

<u>Ισχυρισμός</u>: (K,d) διαχωρίσιμος.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θα κατασκευάσουμε ακολουθία $\{x_k^n\}_k$ ως εξής:

x_1^n: τυχόν στοιχείο του K.

x_2^n: τυχόν στοιχείο του K, τ.ω. $x_2^n \notin B(x_1^n, 1/n)$

x_3^n: — // — — // — — // — — // —, τ.ω. $x_3^n \notin B(x_1^n, 1/n) \cup B(x_2^n, 1/n)$

$\vdots$

x_k^n: — // — — // — — // —, τ.ω.

$x_k^n \notin B(x_1^n, \frac{1}{n}) \cup \dots \cup B(x_{k-1}^n, 1/n)$

• Θα σταματήσουμε την κατασκευή των x_k^n μετά από πεπερασμένου πλήθους βήματα. Αν όχι, θα έχουμε κατασκευάσει μία ακολουθία $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, τ.ω. $d(x_k^n, x_j^n) \geq \frac{1}{n}$, $\forall k \neq j$

$\Longrightarrow$ Καμία υπακολουθία της $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι Cauchy $\Longrightarrow$ Καμία υπακολουθία της $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει, άτοπο από υπόθεση.

• Άρα, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k_n \in \mathbb{N}$, τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, 1/n)$

$\Longrightarrow$ Η οικογένεια $\{x_i^n\}_{n \in \mathbb{N}, i \in \{1,\dots,k_n\}}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του

$K \Longrightarrow (K,d)$ διαχωρίσιμος.

• Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ ανοικτή κάλυψη του K

$\xRightarrow[\text{K διαχωρίσιμος}]{\text{Θ. Lindelof}} \exists A_1, A_2, \ldots \in \{A_i\}_{i\in I}$, τ.ω.

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

• Έστω ότι $\forall n\in\mathbb{N}$, $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

$\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n \in K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$\xRightarrow{\text{υπόθεση}} \exists \{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ και $x\in K$ τ.ω. $x_{k_n} \to x$.

• Όμως, $\exists j\in\mathbb{N}$, τ.ω. $x\in A_j$

και $\exists r>0$, τ.ω. $B(x,r)\subseteq A_j$

$\xRightarrow[\substack{\exists n_0, \text{ τ.ω.} \\ \forall n\geq n_0\ d(x_{k_n},x)<r}]{x_{k_n}\to x} x_{k_n} \in B(x,r) \subseteq A_j$, $\forall n\geq n_0$.

Επίσης, $\exists i_1, i_2, \ldots, i_{n_0-1}$, τ.ω. $x_{k_t}\in A_{i_{k_t}}$, $\forall t\in\{1,\ldots,n_0-1\}$. $\Longrightarrow$

$\{x_{k_n} : n\in\mathbb{N}\} \subseteq \left(\bigcup_{t=1}^{n_0-1} A_{i_t}\right) \cup A_j$

$\subseteq \bigcup_{i=1}^{v} A_i$, όπου $v := \max\{i_1, \ldots, i_{n_0-1}, j\}$

άτοπο. ☒

<u>Πόρισμα 1</u>: Κάθε συμπαγές $K \subseteq X$ είναι κλειστό, φραγμένο και διαχωρίσιμο σύνολο.

<u>Το αντίστροφο δεν ισχύει</u>: π.χ. $X \overset{K}{=}$ άπειρο, αριθμήσιμο σύνολο, $d =$ η διακριτή μετρική

$$\left(d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \right).$$

ανοικτό

• $B(x,1) = \{x\}$. Επίσης, $\{\{x\} : x \in X\}$ ανοικτή κάλυψη του X που δεν ανάγεται σε πεπερασμένη $\Longrightarrow$ X δεν είναι συμπαγής. Όμως, X κλειστό, φραγμένο και διαχωρίσιμο.

<u>Πόρισμα 2:</u> Αν $(X,d) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, τότε $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές ανν K κλειστό και φραγμένο. (Θεώρημα Heine-Borel).

<u>Πόρισμα 3:</u> Αν A συμπαγές, $F \subseteq A$ κλειστό τότε F συμπαγές.

Συνέχεια - Ομοιόμορφη Συνέχεια

Ορισμός: Έστω (X,d), (Y,ρ) μ.χ. $f: X \to Y$, $x_0 \in X$. Η f λέγεται συνεχής στο x_0, αν $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, τ.ω. $\forall x \in X$, με $d(x, x_0) < \delta$, να ισχύει $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Η f λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής στο x_0, $\forall x_0 \in X$.

Θεώρημα 1: Έστω $f: (X,d) \to (Y,\rho)$.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1) f συνεχής
2) $\forall\, O \subseteq Y$ ανοικτό, $f^{-1}(O)$ ανοικτό.
3) $\forall\, F \subseteq Y$ κλειστό, $f^{-1}(F)$ κλειστό.
4) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X$
5) $\forall \{x_n\} \subseteq X$, τ.ω. $x_n \to x$, για κάποιο $x \in X$, ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

Θεώρημα 2: Αν $f: (X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής και $K \subseteq X$ συμπαγές, τότε $f(K)$ συμπαγές.

Ορισμός: $f: (X,d) \to (Y,\rho)$ ομοιόμορφα συνεχής, αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τ.ω. $\forall x, y \in X$, με $d(x,y) < \delta$, να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.